赣南师范学院学报（自然科学）
1989年第2期

微分几何与积分几何*

陈省身

积分几何自从英国几何学家M.W克罗夫顿（Crofton）开始研究以来，现今已通过W.布拉施克(Blasehke)，L.A.桑塔洛（Santalo）及其他学者所做的工作而取得重大进展。一般地说，其主要目的在于研究能够附加于一个给定族的各个测度之间的关系。在这篇文章里，我的意图则是讨论它能为微分几何中某些问题所提供的帮助。

1 欧氏空间中闭子流形的球面象的测度

$n+N$维欧氏空间E^{n+N}中一个n维子流形由一个n维抽象微分流形M^n与雅可比矩阵处处有秩n的可微分映射$x: M^n \to E^{n+N}$来给出。如果映射x是一一的，亦即$x(M^n)$与自身不交，则称M^n是嵌入的。$x(M^n)$的全体单位法向量组成M^n上一个$N-1$维球丛并构成一个$n+N-1$维流形$B\gamma$。尚若O是E^{n+N}的固定点而S_0是以O为原点的单位超球面，便存在一个映射$T: B\gamma \to S_0$，把M^n的单位法向量映入过O的单位向量终点且与这个单位向量平行。T是曲面论中高斯法映射的推广。

从现在起假设M^n是紧的，从而$B\gamma$也是紧的，且我们把象$T(B\gamma)$的体积除以S_0自身的体积定义为$Tx(M^n)$的全曲率，$T(B\gamma)$每点计数的重数等于映入它的点的个数。这个全曲率我们将以$Tx(M^n)$表示。从某种意义上讲它就是子流形弯曲性的一种测度。例如对一条空间闭曲线而言，其全曲率差一个常数因子就是曲率绝对值的积分。

拉藤夫（Lashof）和我〔3，4〕证明了关于全曲率的下列各定理：

（1）全曲率$T_x(M^n)$大于或等于M的关于任一系数域的贝蒂数之和。作为一个推论便得到$T_x(M^n) \geq 2$，这个结果可由M^n上坐标函数极大与极小的一个初等讨论而直接导出。

（2）如果$T_x(M^n) < 3$，则M^n与一球面同胚。（这个结果也已由米尔诺（Milnor）获证〔8〕。）

（3）当且仅当$Tx(M^n) = 2$时，$x(M^n)$为嵌入一个$n+1$維子空间的凸超曲面。

* 这是陈省身教授1958年在英国爱丁堡召开的第十三次国际数学家大会上所作的报告。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这些定理的一个基本根据是M^n上大量坐标函数的存在性。于是莫尔斯（Morse）的临界点理论提供了一个证明的基本工具。

就一个抽象地给出的微分流形而论，人们被引向对于$T_x(M^n)$尽可能小的浸入的研究。这样就自然出现了两个问题：（a）对所有可能的浸入x，只用M^n自身来表示，$T_x(M^n)$的最小值是什么？（b）当全曲率达到最小值的时候，刻划浸入x。当M^n与一球面同胚时，定理3回答了这些问题。

这两个问题对于一般的紧流形所知甚少。定理1表明$T(M^n)=\min_x T_x(M^n)$大于或等于M^n的模2贝蒂数之和。有充分的迹象支持下列猜想，即$T(M^n)$等于可用来把M^n细分为一胞腔复形的胞腔的最小个数，但这一猜想的正确性仍然无定论。

至于问题（b），N. H. 凯珀（Kuipcr）的一种猜想是，如果M^n浸入E^{n+N}，具有最小全曲率$T(M^n)$，则$N\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)$。当$M^n$为一超曲面（N=1）且有最小全曲率时，已经得到若干必要条件。

一种简单的情况是M^n为一空间闭曲线（n=1，N=2）的时候。此时定理2可加强成下面的形式（法雷（Fary）〔5〕与米尔诺（Milnor）〔8〕）：全曲率＜4的空间闭曲线是不打结曲线。于是定理给出了空间纽结的一个简单的必要条件。

另一应用是上述定理3的如下推论：浸入通常欧氏空间中的闭曲面具有高斯曲率$K\geqslant0$，则必为一嵌入凸曲面。在$K>0$这一更强的假设下结论来自阿达玛（Hadamard）的一个著名的论断。或许会使人感兴趣，我们指出，相似的结论对更高维情形并不成立；可以在四维或更高维欧氏空间中找到非凸闭超曲面的例子，它们的高斯-克罗内克（Gauss-Kronecker）曲率处处是非负的。

2　复解析映射的象的测度

复射影空间中的复解析子流形理论与欧氏空间中的子流形理论全然相仿。设M_n为一个（复）n维复流形，$Z: M_n\to P_{n+N}$为M_n映入n+N维复射影空间P_{n+N}的复解析映射。对于这类映射的研究包含了各种经典理论作为特例。事实上，如果M_n是紧的，那末$Z(M_n)$为一代数族。又若M_n为复欧氏直线E_1（或者如通常所称，为高斯平面），则复解析映射$Z: E_1\to P_{1+N}$在H. 韦尔（Weyl），J. 韦尔（Weyl）和阿尔福斯（Ahlfors）的意义下定义了一条亚纯曲线。特别地，复解析映射$Z: E_1\to P_1$的概念等同于定义在高斯平面中的亚纯函数概念。

从皮卡（Picard）的经典定理入手，这种研究的一个主要问题在于决定与象$Z(M_n)$不相交的N维线性空间集合的最大样子。对于亚纯曲线，下面的E.波莱尔（Borel）定理提供了一个令人满意的解答：设亚纯曲线非退化（亦即它不落在P_{1+N}的一张超平面内）。给定处于一般位置的N+3个超平面，则象$Z(E_1)$与其中的一个超平面相交。显然这一定理包含了作为其特例的皮卡（Picard）定理，即高斯平面的一个整函数最多不取一个值。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这一理论主要是几何的，这一事实可从波莱尔（Borel）定理的如下推广得到证实，这个推广易于从阿尔福斯（Ahlfors）的结果推出。设$Z: E_1 \to P_{1+N}$为一非退化亚纯曲线。给定处一般位置的$\binom{N+2}{K+1}+1$个N-k维线性空间，$0 \leqslant k \leqslant N$，则它们中必有一个与曲线的k维密切线性空间相交。

在这一切以及有关结果的建立过程中，积分几何至少在两种情况下发挥作用。虽然定理只涉及曲线与线性子空间的关联，但在P_{n+N}中仍必须使用椭圆埃尔米特度量。于是对于紧M_n，$Z(M_n)$有着有限体积且差一个数值因子，这个体积等于代数族的阶数。体积与阶数的这一等同化，在紧的情况下固然足以使人大感兴趣，而在M_n非紧的情况下则是头等重要的。因为那种情况下阶数的概念并不存在，而体积却是存在的。实践表明，体积履行了阶的许多职能。

由于一个非紧流形可被一列有边界的扩张多面体所穷竭，我们被引向对一复解析映射$Z: M_n \to P_{n+N}$的研究，这里M_n是紧的，可以带有边界也可不带边界。第一个问题如下：给定一个N余维数的一般线性空间L，要决定L和$Z(M_n)$的交点数（每点用它恰当的重数来计数）与$Z(M_n)$体积之差。这个问题已被莱文（Levine）解决〔7〕，他把差值表示为M_n的边界∂M_n上一个积分。其结果可叙述如下：

设$Z=(z_0, z_1, \cdots, z_{n+N}) \neq 0$为$P_{n+N}$的一个齐次坐标向量，从而对非零复数λ，Z与$\lambda Z=(\lambda z_0, \lambda z_1, \cdots, \lambda z_{n+N})$决定同一个点。对Z和$W=(w_0, w_1, \cdots w_{n+N})$，引入埃尔米特数量积。

$$(Z, W) = \overline{(W, Z)} = \sum_{k=0}^{n+N} z_k \bar{w}_k \tag{1}$$

N维线性空间L可用方程

$$l_i \equiv (Z, A_i) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2}$$

来定义，这里设$(A_i, A_j)=\delta ij$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$。那么，对$\zeta \in M_n$，函数

$$u(\zeta, L) = \frac{\|L\|}{|Z|} \leqslant 1$$

$$\left(|Z| = +(Z, Z)^{\frac{1}{2}}, \quad \|L\| = +(l_1\bar{l}_1 + \cdots + l_n\bar{l}_n)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{3}$$

是M_n中已经定义的实值函数，其中$Z=Z(\zeta)$为ζ象点的齐次坐标向量，$u(\zeta, L)$当且仅当$Z(\zeta) \in L$时为零。类似地定义外微分式

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{i}{\pi} d' d'' \log \|L\|, \\ \psi &= \frac{i}{\pi} d' d'' \log |Z|, \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以及

$$\Lambda=\frac{1}{2\pi i}(d'-d'')\log u\wedge\sum_{0\leqslant K\leqslant n-1}\phi^K\wedge\psi^{n-1-K} \qquad (5)$$

然后得到公式

$$v(M_n)-n(M_n, L)=-\int_{\partial M}\Lambda, \qquad (6)$$

式中$n(M_n, L)$为L与$Z(M_n)$公共点的个数，用它们的重数来计数，而$u(M_n)$是适当规范化的$Z(M_n)$体积。尤其可知，若Mn没有边界而$Z(M_n)$非退化，从而$u(M_n)\neq 0$，则$Z(M_n)$与p_{n+N}中每个N维线性空间相交。

非紧复流形的第一个例子或许就是n维复欧氏空间E_n。设$\zeta_1\cdots\zeta_n$为E_n的坐标。当$r\to\infty$时E_n可用区域$M(r)$：

$$\zeta_1\bar{\zeta}_1+\cdots+\zeta_n\bar{\zeta}_n\leqslant r^2 \qquad (7)$$

来穷竭。这样似乎是最自然的穷竭，因为如果我们在无穷远外添上一个超平面π来紧化E_n，则$M(r)$在E_n之补将形成π的一个管状邻域。

首先考虑亚纯函数$Z: E_1\to P_1$的经典情况。设$\upsilon(r)$为$M(r)$的象的体积。对一个一般点$L\in p_1$设$n(r, L)$为L被$Z(M(r))$覆盖的重数。则（6）可以写成

$$\upsilon(r)-n(r, L)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdot r\frac{\partial\log u}{\partial r}d\theta \quad (\zeta_1=r^ie^\theta). \qquad (8)$$

这就促使我们记

$$T(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{\upsilon(t)dt}{t},$$

$$N(r, L)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t, L)dt}{t}\quad(r_0>0) \qquad (9)$$

对（8）式做关于r积分，得到

$$T(r)-N(r, L)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u\,d\theta\Big|_{r_0}^{r} \qquad (10)$$

此即是亚纯函数理论中的所谓第一主定理。我们引入阶函数$T(r)$的过程恰恰就是希米朱-阿尔福斯（Shimizu-Ahlfors)导出阶函数的方法。

因为第一主定理涉及P_1一个一般点L，自然要对它在P_1上积分。如果我们用不变密度dL求积分，则有克罗夫顿（Crofton)型的公式

$$T(r)=\int_{L\in P_1}N(r, L)\,dL, \qquad (11)$$

从中可见（10）式右边的平均值为零。另一方面，从第一主定理导出基本不等式

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$T(r)-N(r, L)>\text{const}. \tag{12}$$

如果我们在一个非不变密度上对这个不等式积分，容易得到如下定理，象集$Z(E_1)$在P_1之补有测度零。一个源于R。尼凡林纳（Nevanlinna）又由阿尔福斯（Ahlfors)简化的思想〔1〕在于其奇性密度的应用。正是由（12）对于这样一个密度求积分，导出了皮卡-波莱尔（Picard-Borel）定理的一种证明。

在复解析映射$Z: E_2\to P_2$的情况，有些已知的例子表明象$Z(E_2)$之补可以包含P_2的开子集，我们将简单讨论对于映射Z的适当限制以便能到一般的结论。事实上，复解析函数的第一主定理具有下列推广：

设$\upsilon(r)$为$M(r)$象的体积而对一般点$L\in P_2$，设$n(r, L)$为L被$Z(M(r))$覆盖的重数。设

$$T(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{\upsilon(t)dt}{t^3},$$

$$N(r, L)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t, L)dt}{t^3}\quad(r_0>0). \tag{13}$$

则有不等式

$$T(r)-N(r, L)>\text{const}-S(r, L), \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{其中}S(r, L)==-\frac{2}{\pi^2}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t}\int(\upsilon_{11}+\upsilon_{22})\log u\,dV\geqslant 0,\\&\upsilon_{kk}=\frac{\partial^2}{\partial\zeta_k\partial\bar{\zeta}_k}\log(|Z|\cdot\|L\|)\quad(K=1, 2),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

积分在E_2单位超球面的体积元素dV上进行。由这个不等式显见为了在象集$Z(E_2)$上取得结论，必须当$r\to\infty$时，有$T(r)\to\infty$。后者在一维情况下自动成立，而在二维情况下却成为一个附加假定。事实上，法都-比勃巴赫（Fatou-Bieberbach）那些著名的例子就不具有这一性质，此外又若

$$S(r, L)=o(T(r)), \tag{16}$$

我们便得到这样的定理，$Z(E_2)$至多缺少一个零测度集。

（16）这一假设从它涉及一般点$L\in P_2$的意义上来说是不能令人满意的。$S(r,L)$的表达式则启发我们应该引入一种“混合阶函数”。实际上，设Ω与Ω_0各为P_2与E_2上分别连带的两个微分式。则

$$\int_{M(r)}Z^*(\Omega)\wedge\Omega_0=\upsilon_1(r), \tag{17}$$

为区域$M(r)$的混合体积，式中$Z^*(\Omega)$为映射Z下Ω的逆象令

$$S(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{\upsilon_1(t)dt}{t^3}. \tag{18}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

用一个关于T(r)和S(r)相对增量的条件来代替条件(16)是可能的。

3 积分公式与刚性定理

如果我不触及积分几何在刚性定理和唯一性定理的证明中所起的作用，相信我对微分几何与积分几何关系的讨论会遗留一个很大的缺陷。这种考虑最有名的例子或许是黑格罗兹(Herglotz)对于韦尔(Weyl)问题中唯一性的证明。且不论这些重要的应用，对于浸入紧子流形推导积分公式，本身也具有独到的情趣。稍作分析运算就可看出几乎不存在这样的公式，除非后者被允许涉及空间的其它几何元养，例如固定点，固定线性子空间，固定方向，如此等等。原因很简单：对于一个浸入子流形$x: M^n \to E^{n+N}$，坐标向量$x(P)$，$P \in M^n$，与原点的选择有关。

最简单的是一个严格凸超曲面$x: M^n \to E^{n+1}$的情况。我们自然会对它定向使高斯-克罗内克(Gauss-Kronecker)曲率处处>0。由于把超曲面$\Sigma = x(M^n)$映入以原点为心的单位超球面S_0的法映射是一一的而且处处具有非零雅可比式，所以超曲面能用$x: S_0 \to \Sigma \subset E^{n+1}$来定义，其中$x$把$S_0$的一点$\xi$映入以$\xi$为单位法向量的$\Sigma$中的点。

为得到刚性定理，设$x': S_0 \to \Sigma'$为一个第二严格凸超曲面。然后就有可能列写在S_0上一些从整体上定义的外微分形式。就我们的目的所需，仅限于下面这些：

$$\left.\begin{aligned} A_{rs} &= (x, \xi, d\xi, \cdots, d\xi, dx, \cdots, dx, dx', \cdots, dx'), \\ A'_{rs} &= (x', \xi, d\xi, \cdots, d\xi, dx, \cdots, dx, dx', \cdots, dx'). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

这些式子中每一个一n+1阶行列式，其各行为相应向量或向量值微分形式的分量，规定在行列式的展开式中微分形式乘法的意义为外乘。下标r指内中dx的个数而下标s为其中dx'的个数。因为A_{rs}与A'_{rs}在S_0上整体定义，它们在S_0上的积分为零。

如此而得的积分公式可用更加几何化的形式表达如下：设$\mathrm{III} = d\xi^2$为S_0的基本形式，又设

$$\mathrm{II} = -dx\,d\xi, \quad \mathrm{II}' = -dx'\,d\xi \qquad (20)$$

分别为Σ，Σ'的第二基本形式。设$\Delta(y, y')$为通常二次微分形式$y\,\mathrm{II} + y'\,\mathrm{II}' + \mathrm{III}$关于一个局部坐标系的行列式，以致$\Delta(y, y')/\Delta(0,0)$与局部坐标系的选择无关。

$$\frac{\Delta(y, y')}{\Delta(0, 0)} = \sum_{0 \leqslant r+s \leqslant n} \frac{n!}{r!\,s!\,(n-r-s)!} y^r y'^s P_{rs} \qquad (21)$$

其中P_{rs}为Σ，Σ'的混合不变式。特别在添上数值因子后P_{l0}，P_{0l}各为Σ，Σ'主曲率半径的第l初等对称函数。于是我们的积分公式能写成

$$\int_{S_0} (PP_{rs} - P_{r+1,s})\,dV = 0, \quad \int_{S_0} (P'P_{rs} - P_{r,s+1})\,dV = 0 \quad (22)$$

这里dV为S_0的体积元素而P，P′分别是Σ，Σ'的支撑函数。(22)的一个重要推论是公式

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\int PP_{0l}dV=\int P'P_{l-1}dV,\quad \int PP_{l-1,1}dV=\int P'P_{l0}dV\ (l\geqslant 1) \tag{23}$$

这又给出

$$2\int P(P_{0l}-P_{l-1,1})dV=\int \{P'(P_{1,l-1}-P_{l0}) - P(P_{l-1,1}-P_{0l})\}V. \tag{24}$$

重要的是注意到（24）的右端在超曲面Σ，Σ′中是反称的。

公式（24）把下列定理的证明化归为一个纯代数问题，该定理就是闵可夫斯基（Minkowksi）与A. D. 亚历山大洛夫（Alexandroff）〔2〕，以及费恩雪尔（Fenchel）与杰逊（Jessen）〔6〕的唯一性定理：如果两个闭的严格凸超曲面在对应点具有平行法线，主曲率半径的第l（对固定的$l\geqslant 2$）个初等对称函数有同样的值，则它们仅相差一个平移。定理对$l=1$也成立，但那时有不同（且更简单）的证明。

所需的代数引理已由L伽定（Garding）写信告我，看作为他在双曲多项式上所做工作的推论。这可以陈述如下：

设(λ_{ik})为一个n×n对称阵，又设

$$\det(\delta_{ik}+y\lambda_{ik})=\sum_{0\leqslant r\leqslant n}P_r(\lambda)y^r \tag{25}$$

设$P_r(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(r)})$为$Pr(\lambda)$的完全极化形式，使得

$$P_r(\underbrace{\lambda,\cdots,\lambda}_{r})=P_r(\lambda)$$

则对$r\geqslant 2$及正定矩阵$(\lambda_{ik}^{(1)}),\cdots,(\lambda_{ik}^{(r)})$成立下列不等式：

$$P_r(\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(r)})\geqslant P_r(\lambda^{(1)})^{1/r}\cdots P_1(\lambda^{(r)})^{1/r}. \tag{26}$$

等号成立当且仅当r个矩阵两两成比列。

然后可由引理与积分公式（24）直接推出唯一性定理。因为有了$P_{0l}=P_{l0}$的前提，从（26）得到$P_{l-1,1}-P_{0l}\geqslant 0$。由（24）可见这仅当$P_{l-1,1}-P_{0l}=0$时才有可能，再次应用引理知道各超曲面的第二基本形式相等。

就我所知，如果主曲率的第l个初等对称函数规定为法向量的函数，还不了解类似的唯一性定理是否成立。亚历山大洛夫（Alexandroff）证明了通常欧氏空间中一个闭凸曲面差一个平移可被决定，如果其平均曲率为法向的一个给定函数。他的证明用了极大值原理，如果这个定理能用积分公式予以证明，谅来是很有趣的。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

〔1〕 Ahlfors, L. The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. fenn, A, 3, 1—31 (1941).

〔2〕 Alexandroff, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen. Korpern (Russian) Mat Sbornik, 2 (44), 947—972, 1205—1238, 3 (45) 27—46, 227—251 (1937—38)

〔3〕 Chern, S. and Lashof, R. K. On the total curvature of immersed manifolds. Amer. J. Math. 79, 302—318 (1957).

〔4〕 Chern, S. and Lashof, R. K. On the total curvature of immersed manifolds. II. Michigan Math. J. 5, 5—12 (1958).

〔5〕 Fary, I. Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant unnoeud Bull. Soc. Math. Fr. 77, 128—139 (1949).

〔6〕 Fenchel, W. and Jessen, B. Mengenfunktionen und konvexe Korper. K. danske vidensk. Selsk. (Math fysiske Medd.), 16, 1—31 (1938).

〔7〕 Levine, Harold I. Contributions to the theory of analytic mappings of complex manifolds into projective space. University of Chicago thesis, 1958.

〔8〕 Milnor, J. W. On the total curvature of knots. Ann. Math. (2) 52 248—257 (1950), also Princeton thesis (unpublished)

（本文译自：Proc. Int. Congr. Math. Edinburgh (1958), 441—449. 李诉川译，虞言林校。）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net